الرياضيات

الصف الثاني عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الثاني

كتاب التمارين

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي أيمن ناصر صندوقه إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطوير المناهج في جلسـته رقـم (2022/7)، تاريخ 2022/11/8 م، وقـرار مجلس التربية والتعليـم رقم (2022/110)، تاريـخ 2022/12/6 م، بـدءًا من العام الـدراسي 2022 / 2023 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2022.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 420 - 0

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/800)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتـاب التمارين: الصـف الثانـي عشـر: الفـرع الأدبـي: الفصـل الدراسـي الثانـي/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.– عمّـان: المركـز، 2023

(22) ص.

ر.إ.: 2023/2/800

الواصفات:/ الرياضيات/ / التمارين/ / أساليب التدريس/ / التعليم الثانوي/

يتحمَّل المُؤلِّف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يُعبِّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1443 هـ / 2022 م

أعيدت طباعته 1444 هـ / 2023 م

أعزّاءنا الطلبة ...

يحتوي هذا الكتاب على تمارين مُتنوِّعة أُعِدَّت بعناية لتغنيكم عن استعمال مراجع إضافية، وهي تُعَدُّ استكمالًا للتمارين الواردة في كتاب الطالب، وتهدف إلى مساعدتكم على ترسيخ المفاهيم التي تتعلَّمونها في كل درس، وتُنمّي مهاراتكم الحسابية.

قد يختار المُعلِّم/ المُعلِّمة بعض تمارين هذا الكتاب واجبًا منزليًّا، ويترك لكم بعضها الآخر لكي تحلّوها عند الاستعداد للاختبارات الشهرية واختبارات نهاية الفصل الدراسي.

أمّا الصفحات التي تحمل عنوان (أستعد لدراسة الوحدة) في بداية كل وحدة، فإنَّها تساعدكم على مراجعة المفاهيم التي درستموها سابقًا؛ ما يُعزِّز قدرتكم على متابعة التعلُّم في الوحدة الجديدة بسلاسة ويسر.

قد لا يتوافر فراغ كافٍ إزاء كل تمرين لكتابة خطوات الحلِّ جميعها؛ لذا يُمكِن استعمال دفتر إضافي لكتابتها بوضوح.

متمنين لكم تعلُّمًا ممتعًا ومُيسَّرًا.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 4 التكامل

أستعد لدراسة الوحدة **6**

الدرس 1 التكامل غير المحدود 9

الدرس 2 الشرط الأوَّلي 10

الدرس 3 التكامل المحدود 11

الدرس 4 المساحة 12

الدرس 5 تكامل اقترانات خاصة 13

الدرس 6 التكامل بالتعويض 14

قائمة المحتويات

الوحدة 5 الإحصاء والاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة **15**

الدرس 1 التوزيع الهندسي 18

الدرس 2 توزيع ذي الحدَّين 19

الدرس 3 التوزيع الطبيعي 20

الدرس 4 التوزيع الطبيعي المعياري 21

الدرس 5 احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول 22

الوحدة 4: التكامل

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• التحويل من الصورة الأُسِّية إلى الصورة الجذرية والعكس

أكتب الصورة الأُسِّية في صورة جذرية، وأكتب الصورة الجذرية في صورة أُسِّية، في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $p^{\frac{1}{6}}$ 2) $w^{\frac{8}{3}}$ 3) $\sqrt[6]{v^5}$ 4) $\sqrt[8]{u}$

مثال: أكتب الصورة الأُسِّية في صورة جذرية، وأكتب الصورة الجذرية في صورة أُسِّية، في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y^{\frac{1}{4}}$

$y^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{y}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

b) $\sqrt[6]{w}$

$\sqrt[6]{w} = w^{\frac{1}{6}}$ تعريف $a^{\frac{1}{n}}$

c) $x^{\frac{3}{4}}$

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[5]{b^2}$

$\sqrt[5]{b^2} = b^{\frac{2}{5}}$ تعريف $a^{\frac{m}{n}}$

• إيجاد قيمة اقتران عند نقطة ما

أجد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة x المعطاة:

5) $f(x) = x^2 - 5x + 9; x = 1$ 6) $h(x) = \sqrt{x} + 10; x = 49$ 7) $g(x) = e^x + 3x; x = 0$

مثال: أجد قيمة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

a) $f(x) = x^3 - 3x - 1; x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 1$ بتعويض $x = -1$

$= 1$ بالتبسيط

b) $f(x) = \sqrt{x} + e^{2x+3}; x = 0$

$f(0) = \sqrt{0} + e^{2(0)+3}$ بتعويض $x = 0$

$= e^3$ بالتبسيط

• إيجاد مشتقة اقترانات مختلفة

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

8 $f(x) = 2x^3$

9 $f(x) = \sqrt{x}$

10 $y = x + \sqrt[5]{2x-5}$

11 $f(x) = (2x+3)(1-x^3)$

12 $y = 8x - \frac{x}{2x+8}$

13 $y = \frac{7}{x^3} + \frac{3}{x} - 2$

14 $f(x) = 7x - e^{2x-1}$

15 $f(x) = x^4 \ln x$

16 $f(x) = \sin 2x + 4\cos 3x$

مثال: **أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:**

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{6x-8}{x^2} + \ln x}$

$f(x) = \frac{6x-8}{x^2} + \ln x$ — الاقتران المعطى

$= \frac{6x}{x^2} - \frac{8}{x^2} + \ln x$ — بقسمة كل حدٍّ في البسط على x^2

$= 6x^{-1} - 8x^{-2} + \ln x$ — تعريف الأُسِّ السالب

$f'(x) = -6x^{-2} + 16x^{-3} + \frac{1}{x}$ — قواعد اشتقاق مضاعفات القوَّة، والفرق، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$= -\frac{6}{x^2} + \frac{16}{x^3} + \frac{1}{x}$ — تعريف الأُسِّ السالب

b) $\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \cos x + e^{2x}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{2x-3}} + \cos x + e^{2x}$ — الاقتران المعطى

$= (2x-3)^{-\frac{1}{2}} + \cos x + e^{2x}$ — بكتابة الجذر في صورة أُسِّية

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(2x-3)^{-\frac{3}{2}} \times 2 - \sin x + 2e^{2x}$ — قاعدة سلسلة القوَّة، ومشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي، ومشتقة اقتران جيب التمام

$= -\frac{1}{(2x-3)^{\frac{3}{2}}} - \sin x + 2e^{2x}$ — تعريف الأُسِّ السالب

- **إعادة تعريف اقتران القيمة المُطلَقة**

أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة: $f(x) = |3x - 9|$.

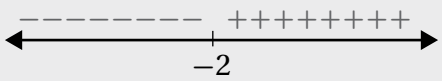
مثال: **أُعيد تعريف اقتران القيمة المُطلَقة: $f(x) = |2x + 4|$.**

الخطوة 1: أدرس إشارة ما في داخل القيمة المُطلَقة، وذلك بمساواته بالصفر ثم حَلِّ المعادلة الناتجة.

بمساواة ما في داخل القيمة المُطلَقة بالصفر	$2x + 4 = 0$
بطرح 4 من طرفي المعادلة	$2x + 4 - 4 = 0 - 4$
بقسمة طرفي المعادلة على 2	$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$
بالتبسيط	$x = -2$

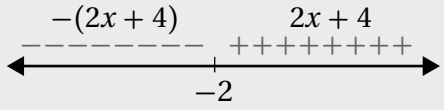
الخطوة 2: أُعيِّن جذر المعادلة على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه.

أُعيِّن العدد -2 على خط الأعداد، ثم أُحدِّد الإشارة على جانبيه بتعويض أيِّ قيمة أقل من -2 في المقدار الجبري: $2x + 4$، فيكون دائمًا ناتج التعويض سالبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار سالبة يسار العدد -2. بعد ذلك أُعوِّض أيَّ قيمة أكبر من -2 في المقدار الجبري: $2x + 4$، فيكون دائمًا ناتج التعويض موجبًا؛ ما يعني أنَّ إشارة المقدار موجبة يمين العدد -2:



الخطوة 3: أكتب قاعدتي الاقتران بحسب إشارة يمين جذر المعادلة ويساره.

أكتب ما في داخل القيمة المُطلَقة كما هو في الجزء الموجب، ثم أكتب في الجزء السالب ما في داخل القيمة المُطلَقة مضروبًا في -1:



الخطوة 4: أكتب قاعدة الاقتران المُتشعِّب.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & , x < -2 \\ 2x + 4 & , x \geq -2 \end{cases}$$

الدرس 1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integral

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int (4x+2)\,dx$
2. $\int 2x^{-4}\,dx$
3. $\int (6x^2-4x)\,dx$
4. $\int (3-x-2x^5)\,dx$
5. $\int \left(x^{-2}+x^{5/2}\right)dx$
6. $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^2}\right)dx$
7. $\int (3x^{-2}+6x^{-1/2}+x-4)\,dx$
8. $\int \left(10x^4+8x^{-3}\right)dx$
9. $\int \left(\frac{2}{x^3}-3\sqrt{x}\right)dx$
10. $\int \left(8x^3+6x-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$
11. $\int \left(\frac{7}{x^2}+\sqrt[3]{x^4}\right)dx$
12. $\int \left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}\right)dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

13. $\int \frac{4+2\sqrt{x}}{x^2}\,dx$
14. $\int \frac{4-x^2}{2+x}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$
16. $\int x\sqrt{x}\,dx$
17. $\int \frac{x^2-1}{x-1}\,dx$
18. $\int x^2(1-x^3)\,dx$
19. $\int (x+4)^2\,dx$
20. $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$
21. $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$
22. $\int x(x+1)^2\,dx$
23. $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$
24. $\int (x-5)(x+5)\,dx$

الشرط الأوَّلي
Initial Condition

في كلٍّ ممّا يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

1. $f'(x)=3x-2;\ (-1,2)$
2. $f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}};\ (4,5)$
3. $f'(x)=-x(x+1);\ (-1,5)$
4. $f'(x)=x^3-\frac{2}{x^2}+2;\ (1,3)$
5. $f'(x)=x+\sqrt{x};\ (1,2)$
6. $f'(x)=-\frac{10}{x^2};\ (1,15)$

7. إذا كان ميـــل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو: $f'(x)=\sqrt{x}$، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$، علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9,25)$.

8. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x^2}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2,4)$.

9. إذا كان ميـــل المماس لمنحنـــى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx}=3x^2-12x+8$، ومَرَّ منحناهـــا بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x، مُبرِّرًا إجابتي.

10. **الإيراد الحـــدِّي:** يُمثِّل الاقتـــران: $R'(x)=x^2-3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تبـــاع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0)=0$.
إرشاد: يُمثِّل الإيراد الحدِّي مشتقة اقتران الإيراد.

11. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t)=3t^2-12t+11$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

12. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t)=6t-30$، حيث t الزمن بالثواني، وa التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة مقدارها $72\ \text{m/s}$، فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

الدرس 3

التكامل المحدود
Definite Integral

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

1. $\int_1^5 10x^{-2}\,dx$
2. $\int_0^2 (2x^3 - 4x + 5)\,dx$
3. $\int_1^4 \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}\,dx$
4. $\int_3^6 \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$
5. $\int_0^5 (|x+3| - 5)\,dx$
6. $\int_0^6 x(6-x)\,dx$
7. $\int_1^2 (6x - \frac{12}{x^4} + 3)\,dx$
8. $\int_0^7 |2x-1|\,dx$
9. $\int_{-3}^4 |6-2x|\,dx$
10. $\int_1^2 \frac{x^2 + x^3}{x}\,dx$
11. $\int_3^4 (6x^2 - 4x)\,dx$
12. $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}\,dx$

إذا كان: $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2$, $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 4$, $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. $\int_2^2 f(x)\,dx$
14. $\int_1^2 (f(x) - 5)\,dx$
15. $\int_{-3}^2 \big(-2f(x) + 5g(x)\big)dx$
16. $\int_2^{-3} \big(g(x) + 2x\big)\,dx$
17. $\int_2^{-3} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$
18. $\int_{-3}^2 \big(4f(x) - 3g(x)\big)\,dx$

19. إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأجد قيمة: $\int_{-3}^{6} f(x)\,dx$.

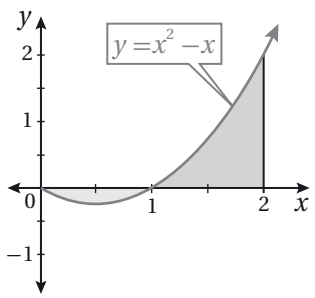
20. **سكّان:** أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يتغيَّر شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة.

21. إذا كان: $\int_2^3 (x^2 - a)\,dx = 5$، فأجد قيمة الثابت a.

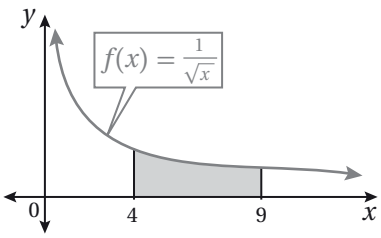
المساحة
Area

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

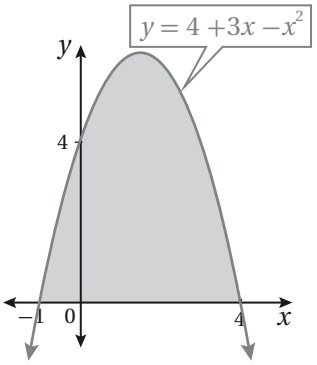
1



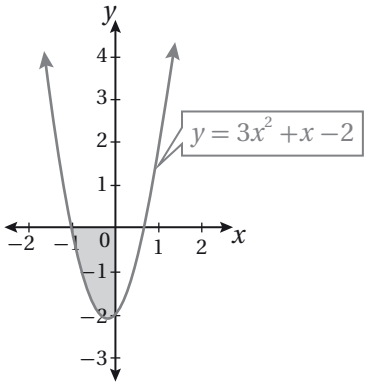
2



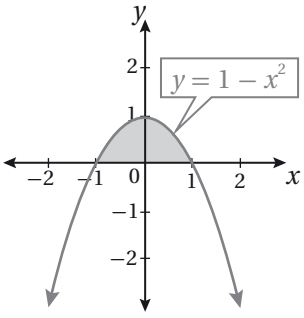
3



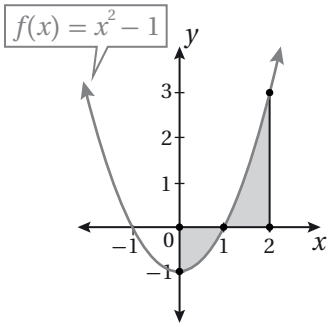
4



5



6



7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$، والمحور x.

8 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$، والمحور x.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 (2 - x)$، والمحور x.

الدرس 5

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int \frac{1-x^2}{5x}\,dx$
2. $\int (5e^x + 4)\,dx$
3. $\int \left(1 - e^{2x-3}\right)dx$
4. $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$
5. $\int \frac{3}{2x-1}\,dx$
6. $\int \left(5 - \sin(5 - 5x)\right)dx$
7. $\int \frac{1}{\frac{1}{3}x - 2}\,dx$
8. $\int \left(2x - 1 + \frac{8}{5x+4}\right)dx$
9. $\int \left(3\cos x + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)dx$
10. $\int (3x+2)^5\,dx$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$
12. $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}\sin(2x-1)\right)dx$
13. $\int \left(\sin(2x+3) + \cos(3x+2)\right)dx$
14. $\int \left(\frac{1}{8}x^{3/2} - \frac{4}{x}\right)dx$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16. $\int_0^1 \sqrt{1+7x}\,dx$
17. $\int_0^1 e^x(4 - e^x)\,dx$
18. $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

19. إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$، فأجد قاعدة العلاقة y، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

20. $f'(x) = e^{-x}\,;\,(0, 3)$
21. $f'(x) = \frac{3}{x} - 4\,;\,(1,0)$
22. $f'(x) = 4e^x - 2\,;\,(0, 1)$

23. **تلوُّث:** يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

24. أُحدِّد أوجه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$\int \left(3\sin(3x+1)\right)dx$ $\qquad$ $\int (3\sin 3x + 1)\,dx$

الدرس 6

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

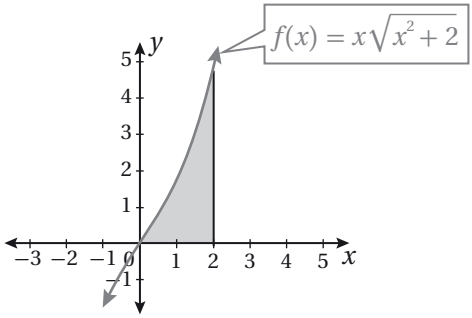
أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int x\sqrt{x^2+3}\ dx$
2. $\int x^4\, e^{x^5+2}\ dx$
3. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\ dx$
4. $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$
5. $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\ dx$
6. $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\ dx$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

7. $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\ dx$
8. $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\ dx$
9. $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$
10. $\int_0^1 (x+1)\,(x^2+2x)^5\ dx$

11. أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



12. **الإيراد الحدِّي:** يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

13. $f'(x) = 2x(4x^2-10)^2\ ;\ (2, 10)$
14. $f'(x) = x^2\, e^{-0.2x^3}\ ,\ \left(0, \frac{3}{2}\right)$

15. يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

الوحدة 5: الإحصاء والاحتمالات

أختبر معلوماتي قبل البَدْء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكُّدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

• إيجاد مضروب العدد الكلي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1. $5!$
2. $4! + 0!$
3. $2! \times 3!$
4. $\frac{9!}{7! \times 2!}$

مثال: أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $6!$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف مضروب العدد الكلي

$= 720$ بالضرب

b) $\frac{8!}{5!}$

$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$ تعريف مضروب العدد الكلي

$= 8 \times 7 \times 6$ باختصار $5!$ من البسط والمقام

$= 336$ بالضرب

• إيجاد التوافيق

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

5. $\binom{8}{5}$
6. $\binom{10}{2} - \binom{7}{0}$
7. $\frac{\binom{13}{4}}{\binom{11}{7}}$

مثال: أجد قيمة $\binom{12}{3}$.

تعريف التوافيق $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!}$

باستعمال تعريف مضروب العدد الكلي $= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3!\,9!}$

بالتبسيط $= 220$

• المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي

أجد قِيَم المُتغيِّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي في كلٍّ ممّا يأتي:

8 في تجربة إلقاء 3 قطع نقدية متمايزة مَرَّة واحدة، دلَّ المُتغيِّر العشوائي Y على عدد مَرّات ظهور الصورة.

9 في تجربة إلقاء حجري نرد متمايزين معًا، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على الفرق المُطلَق للعددين الظاهرين على حجري النرد.

مثال: **في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات ظهور الصورة. أجد مجموعة قِيَم X.**

عناصر الفضاء العيني للتجربة $\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر $X = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

إذن، مجموعة قِيَم المُتغيِّر العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

• توقُّع المُتغيِّر العشوائي، وتباينه، وانحرافه المعياري

10 إذا كان للمُتغيِّر العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

فأجد كُلًّا من توقُّع المُتغيِّر العشوائي X، وتباينه.

مثال: في ما يأتي التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية:

x	3	-5
$P(X=x)$	0.7	0.3

a) أجد التوقُّع $E(X)$.

صيغة التوقُّع $E(X) = \sum x \cdot P(X=x)$

مجموع نواتج الضرب $= 3(0.7) + (-5)(0.3)$

بالتبسيط $= 0.6$

b) أجد التباين σ^2.

صيغة التوقُّع $\sigma^2 = \sum \left(x^2 \cdot P(x)\right) - \left(E(X)\right)^2$

مجموع نواتج الضرب $= 3^2\,(0.7) + (-5)^2\,(0.3) - (0.6)^2$

بالتبسيط $= 13.44$

c) أجد الانحراف المعياري σ.

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

إذن:

$$\sigma = \sqrt{13.44} \approx 3.67$$

الدرس
1

التوزيع الهندسي
Geometric Distribution

إذا كان: $X \sim Geo\left(\frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

1. $P(X = 4)$
2. $P(X \leq 4)$
3. $P(X \geq 2)$
4. $P(3 \leq X < 5)$
5. $P(X < 2)$
6. $P(X > 5)$
7. $P(1 < X < 3)$
8. $P(4 < X \leq 6)$
9. $P(2 < X \leq 4)$

أجد التوقُّع لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

10. $X \sim Geo(0.8)$
11. $X \sim Geo(0.1)$
12. $X \sim Geo(0.75)$

أطلــق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف عنــد إصابته الهدف أوَّل مَرَّة. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مَرَّة هو 0.7، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. احتمال أنْ يصيب الهدف أوَّل مَرَّة في المحاولة العاشرة.
14. احتمال أنْ يُطلِق رصاصتين على الأقل حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.
15. العدد المُتوقَّع من الرصاصات التي سيُطلِقها عماد حتى يصيب الهدف أوَّل مَرَّة.

دوَّرت هديل مُؤشِّر قرص بشــكل مُتكرِّر، وكان القرص مُقسَّمًا إلى 4 قطاعات مُتطابِقة ومُلوَّنة بالأحمر، والأخضر، والأزرق، والأصفر. إذا دلَّ المُتغيِّر العشــوائي X على عدد مَرّات تدوير مُؤشِّــر القرص حتى توقُّفه عند اللون الأصفر أوَّل مَرَّة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

16. احتمال أنْ تكون المَرَّة الثالثة هي أوَّل مَرَّة يتوقَّف فيها مُؤشِّر القرص عند اللون الأصفر.
17. احتمال أنْ تُدوِّر هديل مُؤشِّر القرص أكثر من 4 مَرّات حتى يتوقَّف المُؤشِّر عند اللون الأصفر أوَّل مَرَّة.

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا هندسيًّا، وكان التوقُّع $E(X) = 2$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

18. $P(X = 1)$
19. $P(X > 3)$

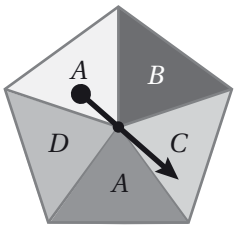
الدرس
2

توزيع ذي الحدَّين
Binomial Distribution

إذا كان: $X \sim B\left(20, \frac{1}{8}\right)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1. $P(X = 18)$
2. $P(X \leq 3)$
3. $P(1 < X \leq 3)$

يُمثِّل الشكل المجاور قرصًا على شكل خماسي منتظم. إذا دُوِّر مُؤشِّر القرص 10 مَرّات، ودلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد مَرّات توقُّف المُؤشِّر على الحرف A، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



4. احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مَرّات فقط.
5. احتمال أنْ يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A ثلاث مَرّات على الأقل.
6. احتمال ألّا يتوقَّف المُؤشِّر على الحرف A نهائيًّا.

طيران: يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20 مَرَّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

7. احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات فقط.
8. احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مَرّات على الأقل.
9. احتمال أنْ يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المَرّات جميعها.
10. العدد المُتوقَّع من المَرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط.

أجد التوقُّع والتباين لكلٍّ من المُتغيِّرات العشوائية الآتية:

11. $X \sim B(40, 0.2)$
12. $X \sim B(280, 0.4)$
13. $X \sim B\left(48, \frac{1}{6}\right)$

14. **أمراض:** وَفقًا لدراسة طبية، فإنَّ 9% من البالغين حول العالَم مصابون بمرض السُّكَّري. إذا اختيرت عيِّنة عشوائية من البالغين تضمُّ 12000 شخص، فما العدد المُتوقَّع من المصابين بمرض السُّكَّري في هذه العيِّنة؟

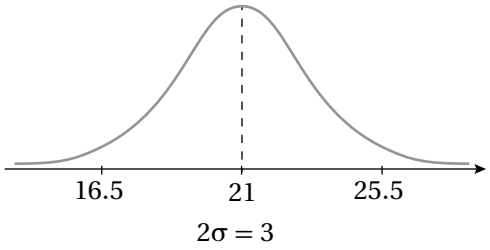
الدرس 3

التوزيع الطبيعي
Normal Distribution

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

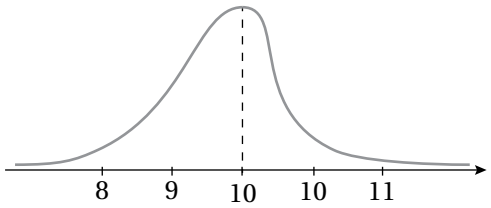
1. النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.
2. النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البُعْد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.
3. النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.
4. النسبة المئوية للطلبة الذين تقلُّ أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

5. يُبيِّن الشكل المجاور منحنى توزيع طبيعي. أُعبِّر عن المُتغيِّر العشوائي لهذا التوزيع باستعمال الرموز.

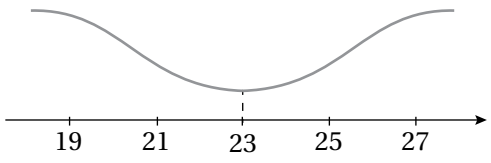


أُبيِّن لماذا لا يُمثِّل أيٌّ من التمثيلين الآتيين منحنى توزيع طبيعي:

6.



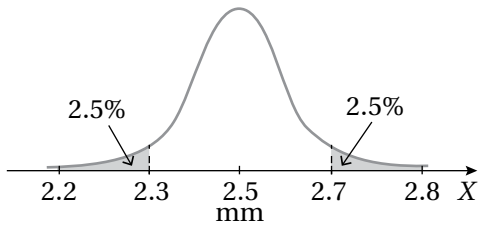
7.



إذا كان: $X \sim N(8, 0.04)$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

8. $P(X > 8)$
9. $P(7.8 < X < 8.2)$
10. $P(X > 8.4)$

صناعة: يُمكِن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتِجها مصنع بمنحنى التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



11. أجد كُلًّا من الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.
12. أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطْر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.

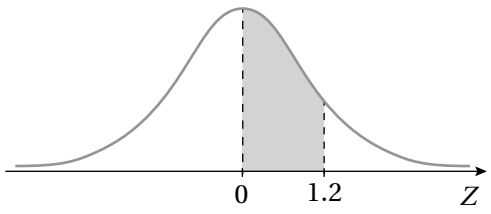
الدرس 4

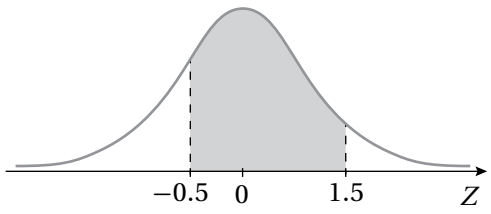
التوزيع الطبيعي المعياري
Standard Normal Distribution

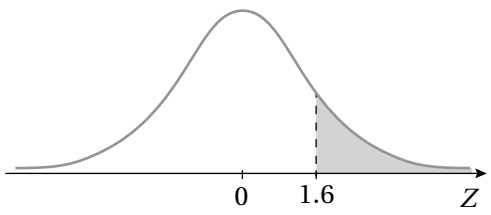
أجد كُلًّا ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

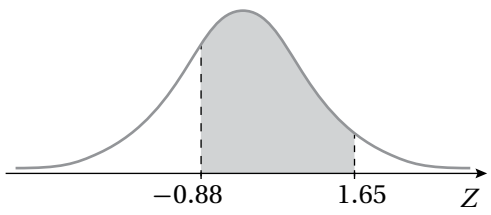
1. $P(Z < 1.42)$
2. $P(Z < 0.87)$
3. $P(Z > 1.06)$
4. $P(Z < -2.78)$
5. $P(Z > -1.33)$
6. $P(1.1 < Z < 2.1)$
7. $P(-2.65 < Z < -1.43)$
8. $P(0.24 < Z < 1.1)$
9. $P(Z < -0.54)$
10. $P(-1.8 < Z < 1.8)$
11. $P(Z < -1.75)$
12. $P(Z > 0.81)$
13. $P(-1 < Z < -0.33)$
14. $P(0.4 < Z < 1.7)$
15. $P(Z > 2.09)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلٍّ ممّا يأتي:

16.


17.


18.


19.


أجد قيمة a التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

20. $P(Z < a) = 0.9082$
21. $P(Z < a) = 0.0314$
22. $P(Z > a) = 0.95$
23. $P(Z < a) = 0.5442$
24. $P(Z > a) = 0.2743$
25. $P(Z > a) = 0.6231$

26. إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$، وكان: $P(1 < Z < c) = 0.1408$، فأجد قيمة الثابت c.

الدرس
5

احتمال المُتغيِّر العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول
Probability of Normal Random Variable Using the Table

إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 89، وانحرافه المعياري 11.5، فأجد القيمة المعيارية z التي تُقابِل قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $x = 81$
2. $x = 92$
3. $x = 100$

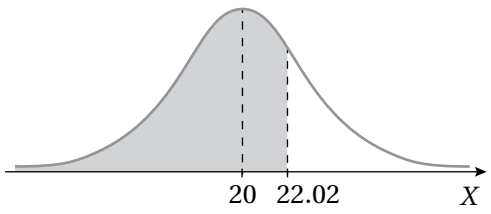
إذا كان X مُتغيِّرًا عشوائيًّا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 220، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُقابِل القيمة المعيارية z في كلٍّ ممّا يأتي:

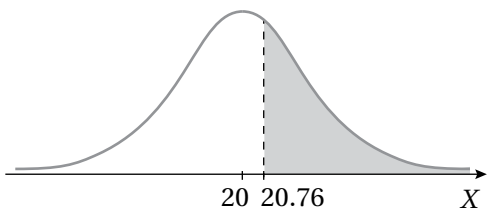
4. $z = 2$
5. $z = -3.5$
6. $z = 4.2$

إذا كان: $X \sim N(17, 100)$، فأجد كل احتمال ممّا يأتي، مُستعمِلًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

7. $P(X < 25.8)$
8. $P(X > 10.5)$
9. $P(19.4 < X < 30.2)$
10. $P(4 < X < 17)$

إذا كان: $X \sim N(20, 9)$، فأجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي للمُتغيِّر العشوائي X في كلٍّ ممّا يأتي:

11.


12.


رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السلَّة توزيعًا طبيعيًّا، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm. إذا اختير لاعب عشوائيًّا، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

13. احتمال أنْ يزيد طول اللاعب على 175 cm.
14. احتمال أنْ يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm.
15. العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.